SİTEB
Çetin YAZICIOĞLU
EĞİTİM BÜROSU
(0.312) 419 05 87 - www.cetinyazicioglu.com - danisma@cetinyazicioglu.com - (0.312) 424 13 03

BELİRLİ İNTEGRAL

VE

ALAN

KONU ANLATIMI

BELİRLİ İNTEGRAL

$f:[a,b] \to R$ sürekli bir fonksiyon,

$\int f(x)\,dx = F(x) + c$ ise

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

ifadesine $f(x)$ in belirli integrali denir. Belirli integralde sadeleşeceği için integral sabiti alınmaz.

Belirli İntegralin Özellikleri

1. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

2. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

3. $a<b<c$ olmak üzere,

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

4. Belirsiz integral için geçerli özellikler belirli integral için de geçerlidir.

5. Özel tanımlı fonksiyonlarda integral kritik noktalarına göre parçalanarak integrali hesaplanır.

ÖRNEKLER

1) $\int_1^3 (2x+5)\,dx = ?$

Çözüm:

$$\int_1^3 (2x+5)\,dx = \left(2\frac{x^2}{2} + 5x\right)\Big|_1^3$$

$= (9+15) - (1+5)$

$= 24 - 6$

$= 18$ bulunur.

2) $\int_2^4 f(x)\,dx = 10$ ve $\int_2^4 g(x)\,dx = 3$

ise $\int_2^4 [3f(x) - 2g(x)]\,dx = ?$

Çözüm:

$3 \cdot \int_2^4 f(x)\,dx - 2\int_2^4 g(x)\,dx$

$= 3 \cdot 10 - 2 \cdot 3$

$= 30 - 6$

$= 24$ bulunur.

3) 1983 ÖYS:

$\int_a^b (2x+3)\,dx = 50$ ve $b - a = 5$

olduğuna göre $a+b$ kaçtır?

Çözüm

$\left(\frac{2x^2}{2} + 3x\right)\Big|_a^b = 50$

$(b^2 + 3b) - (a^2 + 3a) = 50$

$b^2 - a^2 + 3b - 3a = 50$

$(b-a)(b+a) + 3(b-a) = 50$

$\underbrace{(b-a)}_{5}\,[b+a+3] = 50$

$b + a + 3 = 10 \Rightarrow \boxed{b+a = 7}$

4) $\frac{d}{dx}\left(\int_3^7 (x^4 + 2x + 5)\,dx\right) = ?$

Çözüm:

$\int_3^7 (x^4 + 2x + 5)\,dx =$ sabit bir sayı çıkar

Bu durumda $\frac{d}{dx}$ (sabit sayı) $= 0$

Sabit sayının türevi "0" dır.

5) $\int_{1}^{3} |x-2|\,dx = ?$

Çözüm: $x-2=0 \Rightarrow x=2$

$$\int_{1}^{3} |x-2|\,dx = \int_{1}^{2} -(x-2)\,dx + \int_{2}^{3} (x-2)\,dx$$

$$= \left(-\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big|_{1}^{2} + \left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_{2}^{3}$$

$$= \left[\left(-\frac{4}{2}+4\right)-\left(-\frac{1}{2}+2\right)\right] + \left[\left(\frac{9}{2}-6\right)-\left(\frac{4}{2}-4\right)\right]$$

$$= -2+4+\frac{1}{2}-2+\frac{9}{2}-6-2+4$$

$= 9-8 = 1$ bulunur.

6) $\int_{-3}^{0} \frac{x^2-4}{|x+2|}\,dx = ?$

Çözüm: $x+2=0 \Rightarrow x=-2$

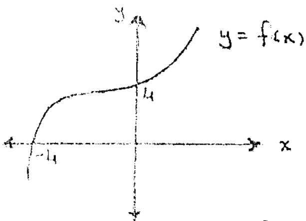
$$\int_{-3}^{-2} \frac{(x-2)(x+2)}{-(x+2)}\,dx + \int_{-2}^{0} \frac{(x+2)(x-2)}{x+2}\,dx$$

$$= \int_{-3}^{-2} (-x+2)\,dx + \int_{-2}^{0} (x-2)\,dx$$

$$= \left(-\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big|_{-3}^{-2} + \left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_{-2}^{0}$$

$= -\frac{3}{2}$ bulunur.

7)



Şekilde grafiği verilen f fonksiyonu için, $\int_{-4}^{0} f'(x)\,dx = ?$

Çözüm:

$$\int_{-4}^{0} f'(x)\,dx = f(x)\Big|_{-4}^{0} = f(0)-f(-4)$$

$= 4-0$

$= 4$ bulunur.

8) $f(x) = \begin{cases} 3x^2, & -2 < x \le 1 \text{ ise} \\ 2x, & 1 < x < 3 \text{ ise} \end{cases}$

$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = ?$

Çözüm:

$$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} 3x^2\,dx + \int_{1}^{2} 2x\,dx$$

$$= \frac{3x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} + \frac{2x^2}{2}\Big|_{1}^{2}$$

$$= [1-(-1)] + [4-1]$$

$= 2+3$

$= 5$ bulunur.

9) $f(x) = \begin{cases} 3-x, & x < 2 \text{ ise} \\ 2x-3, & x \ge 2 \text{ ise} \end{cases}$ için,

$\int_{1}^{3} f(x+1)\,dx = ?$ (2010 LYS-1)

Çözüm:

$x=3 \Rightarrow f(3+1) = f(4)$

$x=1 \Rightarrow f(1+1) = f(2)$

$f(x) = 2x-3$ alınır.

$$\int_{1}^{3} f(x+1)\,dx = \int_{2}^{4} (2x-3)\,dx$$

$$= \left(\frac{2x^2}{2}-3x\right)\Big|_{2}^{4}$$

$= (16-12)-(4-6)$

$= 4+2$

$= 6$ bulunur.

10) $\int_{0}^{3} f(3x-1)\,dx = 12$ olduğuna göre $\int_{-1}^{8} f(x)\,dx$ in değeri kaçtır?

Çözüm: $3x-1=u \Rightarrow 3dx=du$

$x=3 \rightarrow u=8$

$x=0 \rightarrow u=-1$

$$\int_{-1}^{8} f(u)\,\frac{du}{3} = 12 \Rightarrow \int_{-1}^{8} f(u)\,du = 12\cdot 3 = 36$$

11) $\int_3^{15} f(x)dx = 24$ olduğuna göre,

$\int_1^5 f(3x)dx$ ifadesinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$3x = u \Rightarrow 3dx = du$

$x = 5 \rightarrow u = 15$

$x = 1 \rightarrow u = 3$

$$\int_3^{15} f(x)\,dx = 24 \Rightarrow \int_3^{15} f(u)\,du = 24$$

$$\int_1^5 f(3x)dx = \int_3^{15} f(u)\cdot\frac{du}{3} = \frac{24}{3} = 8$$

12) $\int_2^5 f(3x-1)\,dx = 6$ olduğuna göre,

$\int_5^{14} f(x)dx$ integralinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$3x-1 = u \Rightarrow 3dx = du$

$x = 5 \rightarrow u = 14$

$x = 2 \rightarrow u = 5$ olur.

$$\int_5^{14} f(u)\,\frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int_5^{14} f(u)\,du = 6$$

$$= \int_5^{14} f(x)\,dx = 18 \text{ bulunur.}$$

13) $\int_0^4 \frac{t^2-1}{t^2}\,dt$ integraline $x=\sqrt{t}$ dönüşümü uygulandığında elde edilen integrali bulunuz.

Çözüm:

$x^2 = t \Rightarrow 2x\,dx = dt$

$x^4 = t^2$

$t = 0 \rightarrow x = 0$

$t = 4 \rightarrow x = 2$

$$\int_0^2 \frac{x^4-1}{x^4}\,2x\,dx = 2\int_0^2\left(x-\frac{1}{x^3}\right)dx$$

elde edilir.

İntegral İşareti Altında Türev Almak

(Leibnitz Teoremi)

İntegral Hesabının Temel Teoremi

$f:[a,b] \rightarrow R$ sürekli bir fonksiyon ve $F(x)$, (a,b) aralığında türevlenebilen bir fonksiyon ise,

a) $F(x) = \int_{a}^{x} f(t)\,dt \Rightarrow F'(x) = f(x)$

$x \Rightarrow$ değişken, $a \rightarrow$ sabit sayı

b) $F(x) = \int_{a}^{g(x)} f(t)\,dt \Rightarrow F'(x) = f(g(x))\cdot g'(x)$

$g(x) \rightarrow$ değişken, $a \rightarrow$ sabit sayı

c) $F(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt$ ise,

$g(x) \rightarrow$ değişken, $h(x) \rightarrow$ değişken

$$F'(x) = f(g(x))\cdot g'(x) - f(h(x))\cdot h'(x)$$

ÖRNEKLER

1) $F(x) = \int_2^x (t^3-2t)\,dt$ ise $F'(x)$ nedir?

Çözüm:

$f(t) = t^3-2t \Rightarrow f(x) = x^3-2x$

$F'(x) = f(x) = x^3-2x$ bulunur.

2) $F(x) = \int_1^{x^2} (t+\cos t)\,dt$ ise $F'(x) = ?$

Çözüm:

$f(t) = t+\cos t \Rightarrow f(x^2) = x^2+\cos x^2$

$\Rightarrow (x^2)' = 2x$

$F'(x) = (x^2+\cos x^2)\cdot 2x$ bulunur.

3) $\frac{d}{dx}\left(\int_{x^2}^{2} (t^3-3t^2-t)\,dt\right) = ?$

Çözüm:

$0 - \left[(x^2)^3 + 3(x^2)^2 - x^2\right]\cdot 2x$

$= -(x^6+3x^4-x^2)\cdot 2x$

$= -2x^7-6x^5+2x^3$ bulunur.

4) $F(x)=\int_{1}^{\sqrt{x}} \frac{t^2}{t^4+3}\,dt$ ise $F(x)$ fonksiyonunun $x=1$ apsisli noktasındaki teğetinin eğimi kaçtır?

Çözüm:

$f(t)=\frac{t^2}{t^4+3}$, $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$F'(x)=\frac{(\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x})^4+3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$F'(x)=\frac{x}{x^2+3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$F'(1)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$ bulunur.

5) $\frac{d}{du}\left(\int_{1}^{u^2}\frac{x^2-1}{x+3}\,dx\right)=?$

Çözüm:

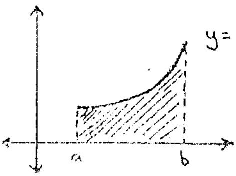
$f(x)=\frac{x^2-1}{x+3}$, $f(u^2)=\frac{u^4-1}{u^2+3}$

$(u^2)'=2u$

$F'(u)=f(u^2)\cdot 2u$

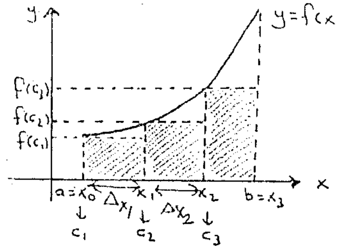
$=\frac{u^4-1}{u^2+3}\cdot 2u$ bulunur.

Bir Fonksiyonun Grafiği ile x Ekseni Arasında Kalan Sınırlı Bölgenin Alanının Riemann Toplamı Yardımıyla Yaklaşık Olarak Hesaplanması



Yukarıda $[a,b]$ nda tanımlı $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. $[a,b]$ nda $y=f(x)$ eğrisi ile x ekseni arasında kalan bölgenin alanı Alman matematikçi Bernhard Riemann (Bernard Riman) tarafından hesaplanmıştır.

Riemann Alt Toplamı



✓ $c_1\in[x_0,x_1]$ için $f(c_1)$, $[x_0,x_1]$ nın görüntü kümesinin <u>en küçük</u> elemanı,

✓ $c_2\in[x_1,x_2]$ için $f(c_2)$, $[x_1,x_2]$ nın görüntü kümesinin <u>en küçük</u> elemanı,

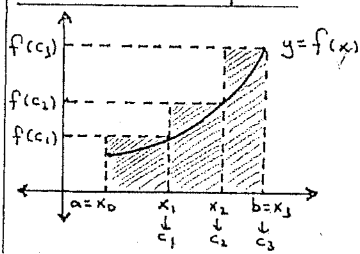
✓ $c_3\in[x_2,x_3]$ için $f(c_2)$, $[x_2,x_3]$ nın görüntü kümesinin <u>en küçük</u> elemanı olmak üzere

Grafikteki eğrinin altında oluşan boyalı dikdörtgenlerin toplam alanını veren

$\Delta x_1 f(c_1)+\Delta x_2 f(c_2)+\Delta x_3 f(c_3)$

toplamına $f(x)$ fonksiyonunun $[a,b]$ na ait <u>Riemann alt toplamı</u> denir. Burada $[a,b]$ 3 alt aralığa ayrılmıştır. Eğer $[a,b]$ daha fazla alt aralığa ayrılırsa bulunan Riemann alt toplamının değeri, eğrinin altında kalan alanın değerine daha yakın olur.

Riemann Üst Toplamı



✓ $c_1 \in [x_0, x_1]$ için $f(c_1)$, $[x_0, x_1]$ nın görüntü kümesinin <u>en büyük</u> elemanı,

✓ $c_2 \in [x_1, x_2]$ için $f(c_2)$, $[x_1, x_2]$ nın görüntü kümesinin <u>en büyük</u> elemanı,

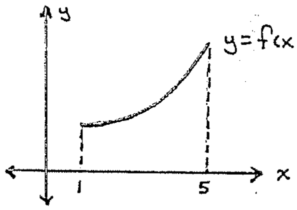
✓ $c_3 \in [x_2, x_3]$ için $f(c_3)$, $[x_2, x_3]$ nın görüntü kümesinin <u>en büyük</u> elemanı olmak üzere

Grafikteki eğrinin üzerinde oluşan boyalı dikdörtgenlerin toplam alanını veren

$\Delta x_1 \cdot f(c_1) + \Delta x_2 \cdot f(c_2) + \Delta x_3 \cdot f(c_3)$

toplamına $f(x)$ fonksiyonunun $[a,b]$ na ait <u>Riemann üst toplamı</u> denir. Burada $[a,b]$ 3 alt aralığa ayrılmıştır. Eğer $[a,b]$ daha fazla alt aralığa ayrılırsa bulunan Riemann üst toplamının değeri eğrinin altında kalan alanın değerine daha yakın olur.

<u>ÖRNEK 1:</u>



Yukarıda $[1,5]$ nda tanımlı $f(x) = x^2 + 2$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. $[1,5]$ 4 eşit alt aralığa ayrılıyor. Buna göre,

a) Riemann alt toplamını bulunuz.

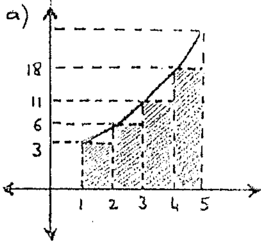
b) Riemann üst toplamını bulunuz

c) Her alt aralığın orta noktasına göre hesaplanan Riemann toplamını bulunuz.

d) $n \to \infty$ gidecek şekilde aralık olursa

<u>Çözüm</u> :

a)



Yandaki grafikte gösterilen Riemann alt toplamı A ise,

$A = \Delta x\, f(1) + \Delta x \cdot f(2) + \Delta x \cdot f(3) + \Delta x\, f(4)$

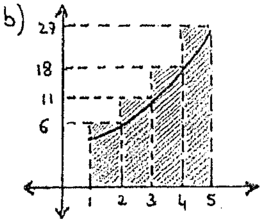
$= 1 \cdot f(1) + 1 \cdot f(2) + 1 \cdot f(3) + 1 \cdot f(4)$

$= 1 \cdot 3 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 11 + 1 \cdot 18$

$= 3 + 6 + 11 + 18$

$= 38$ bulunur.

b)



Yandaki grafikte gösterilen Riemann üst toplamı B ise,

$B = \Delta x \cdot f(2) + \Delta x \cdot f(3) + \Delta x \cdot f(4) + \Delta x \cdot f(5)$

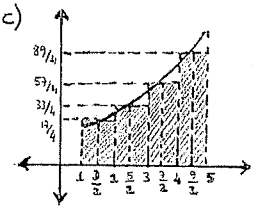
$= 1 \cdot f(2) + 1 \cdot f(3) + 1 \cdot f(4) + 1 \cdot f(5)$

$= 1 \cdot 6 + 1 \cdot 11 + 1 \cdot 18 + 1 \cdot 27$

$= 6 + 11 + 18 + 27$

$= 62$ bulunur.

c)



Yandaki grafikte gösterilen Riemann toplamı C ise,

$C = \Delta x \cdot f\left(\frac{3}{2}\right) + \Delta x \cdot f\left(\frac{5}{2}\right) + \Delta x \cdot f\left(\frac{7}{2}\right) + \Delta x \cdot f\left(\frac{9}{2}\right)$

$= 1 \cdot \frac{17}{4} + 1 \cdot \frac{33}{4} + 1 \cdot \frac{57}{4} + 1 \cdot \frac{89}{4}$

$= 49$ bulunur.

$d)\ \int_1^5 (x^2+2)\,dx = \left(\frac{x^3}{3}+2x\right)\Big|_1^5$

$= \left(\frac{125}{3}+2\cdot5\right) - \left(\frac{1}{3}+2\cdot1\right)$

$= \frac{125}{3} + 10 - \frac{1}{3} - 2$

$= \frac{124}{3} + 8$

$= \frac{124+24}{3}$

$= \frac{148}{3}$

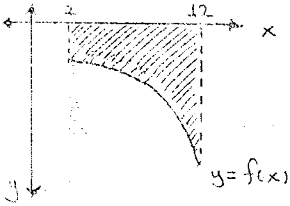
Alan $= 49,33\ldots$

Alt toplam < Alan < Üst toplam

$38 < \text{Alan} < 62$

$\boxed{38 < 49,33 < 62}$

ÖRNEK 2 :



Yukarıda [2,12] aralığında tanımlı $f(x) = -x^2-2$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Bu eğri ile x ekseni arasında kalan taralı bölgenin alanını [2,12] aralığını 5 eşit parçaya bölerek,

a) Riemann alt toplamı yardımıyla yaklaşık olarak hesaplayınız

b) Riemann üst toplamı yardımıyla yaklaşık olarak hesaplayınız

c) Alt aralıkların orta noktalarına göre Riemann toplamı yardımıyla hesaplayınız.

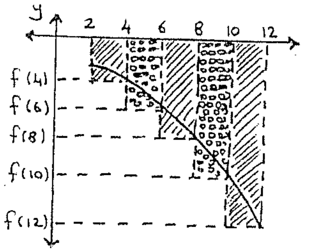
d) $n \to \infty$ olacak şekilde alınırsa alanı hesaplayınız.

Çözüm :

[2,12] aralığını 5 eşit aralığa ayıracağımız için ortak genişlik

$\Delta x = \frac{12-2}{5} = 2$ olur.

a)



f(x) fonksiyonunun [2,12] 5 eşit alt aralığa ayrılarak hesaplanan Riemann alt toplamı A ise,

$A = \Delta x \cdot f(4) + \Delta x \cdot f(6) + \Delta x \cdot f(8) + \Delta x \cdot f(10) + \Delta x f(12)$

$f(x) = -x^2-2$ idi

$f(4) = -16-2 = -18$

$f(6) = -36-2 = -38$

$f(8) = -64-2 = -66$

$f(10) = -100-2 = -102$

$f(12) = -144-2 = -146$

$A = \Delta x\,(f(4)+f(6)+f(8)+f(10)+f(12))$

$= 2\cdot(-18-38-66-102-146)$

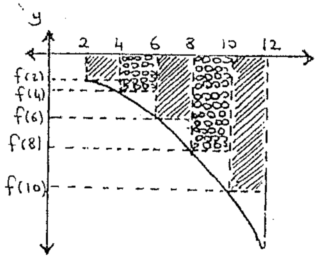
$= 2\cdot(-370)$

$= -740$ olur.

y= f(x) fonksiyonunun grafiği x ekseninin altında kaldığından Riemann alt toplamı negatif olur.

Buna göre f(x) fonksiyonu ile x ekseni arasında kalan bölgenin alanı yaklaşık olarak 740 birimkare bulunur.

b)



$y=f(x)$ fonksiyonunun $[2,12]$ aralığı 5 esit alt aralığa ayrılarak hesaplanan Riemann üst toplamı B ise,

$B=\Delta x\, f(2)+\Delta x f(4)+\Delta x\, f(6)+\Delta x f(8)+\Delta x f(10)$

$f(x)=-x^2-2$ idi

$f(2)=-4-2=-6$

$f(4)=-16-2=-18$

$f(6)=-36-2=-38$

$f(8)=-64-2=-66$

$f(10)=-100-2=-102$

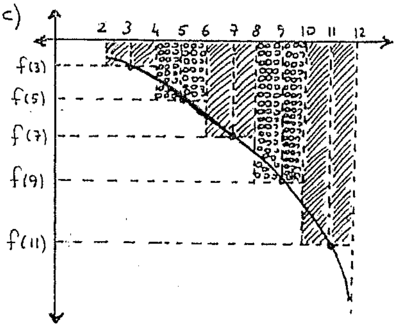
$B=2\cdot(-6-18-38-66-102)$

$=2\cdot(-230)$

$=-460$ olur.

f(x) fonksiyonunun grafiği x ekseninin altında kaldığından Riemann üst toplamı negatif olur. Buna göre f(x) fonksiyonu ile x ekseni arasında kalan bölgenin alanı yaklaşık olarak 460 birimkare bulunur.

c)



$y=f(x)$ fonksiyonunun $[2,12]$ yi 5 esit aralığa ayırarak bu aralıkların orta noktalarına göre hesaplanan Riemann toplamı C ise,

$C=\Delta x f(3)+\Delta x f(5)+\Delta x f(7)+\Delta x f(9)+\Delta x f(11)$

$f(x)=-x^2-2$ idi

$f(3)=-9-2=-11$

$f(5)=-25-2=-27$

$f(7)=-49-2=-51$

$f(9)=-81-2=-83$

$f(11)=-121-2=-123$

$C=2\cdot(-11-27-51-83-123)$

$=2\cdot(-295)$

$=-590$ olur.

f(x) fonksiyonunun grafiği x ekseninin altında kaldığından Riemann toplamı negatif olur. Buna göre alan yaklaşık olarak 590 br^2 bulunur.

d) $\displaystyle\int_2^{12}(-x^2-2)\,dx=-\frac{x^3}{3}-2x\,\Big|_2^{12}$

$=\left(-\frac{12\cdot 12\cdot \cancel{12}^{\,4}}{\cancel{3}}-2\cdot 12\right)-\left(\frac{8}{3}-4\right)$

$=-576-24+\frac{8}{3}+4$

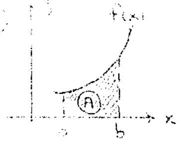
$=-576-20+\frac{8}{3}$

$=-596+\frac{8}{3}$

$=-593,33..$

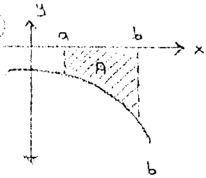
$460<$ Alan <740 bulundu.

(1)



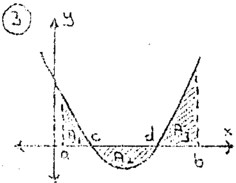
$[a,b]$ aralığında $f(x) \geq 0$ ise $y=f(x)$ eğrisi, $x=a$ ve $x=b$ doğruları ve x ekseni ile sınırlı bölgenin alanı $A=\int_a^b f(x)\,dx$ ile hesaplanır.

(2)



$[a,b]$ aralığında $f(x) \leq 0$ ise $y=f(x)$ eğrisi $x=a$ ve $x=b$ doğruları ve x ekseni ile sınırlı bölgenin alanı $A=-\int_a^b f(x)\,dx$ ile hesaplanır.

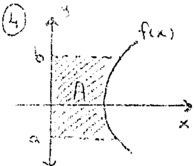
(3)



Şekilde $[a,b]$ aralığında taralı alan;

$$A_1+A_2+A_3=\int_a^c f(x)\,dx-\int_c^d f(x)\,dx+\int_d^b f(x)\,dx$$

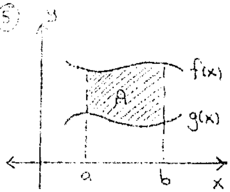
(4)



$[a,b]$ aralığında $f(y) \geq 0$ ise $y=b$ ve $y=a$ doğruları ile y ekseni arasında kalan alan;

$A=\int_a^b f(y)\,dy$ ile hesaplanır.

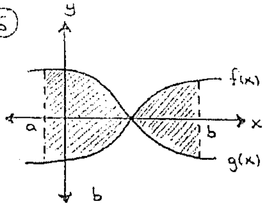
(5)



Şekildeki taralı alanı bulmak için, üstteki fonksiyondan alttaki fonksiyon çıkarılır ve integrali alınır.

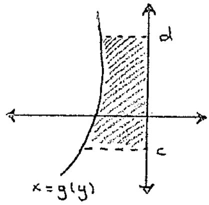
$$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx \quad \text{dir.}$$

(6)



$$A=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx \quad \text{dir.}$$

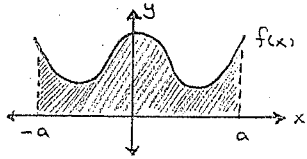
(7)



$[c,d]$ aralığında $g(y) \leq 0$ ise

$$A=\int_c^d -g(y)\,dy$$

NOT 1 !



f(x) çift fonksiyon ise $f(-x)=f(x)$ olduğundan f nin grafiği y eksenine göre simetriktir.

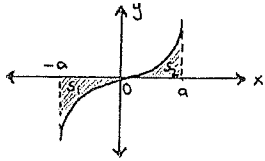
$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx=\int_0^a f(x)\,dx$$

ÖRNEK:

f(x) çift fonksiyon ve $\int_{-4}^{0} f(x)\,dx=6$ ise $\int_{-4}^{4} f(x)\,dx=?$

Çözüm: $2 \cdot 6 = 12$ bulunur.

NOT 2 !



f(x) tek fonksiyon ise $f(-x)=-f(x)$ olduğundan f nin grafiği orijine göre simetriktir.

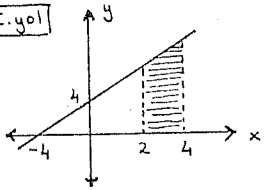
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=\int_{-a}^{0} f(x)\,dx+\int_0^a f(x)\,dx=-S_1+S_2=0$$

ÖRNEKLER

1) $y = x+4$ doğrusu, $x=2$ ve $x=4$ doğruları ve x ekseni ile sınırlı bölgenin alanı kaç br^2 dir?

Çözüm:

I. yol



$$\int_2^4 (x+4)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + 4x\right)\Bigg|_2^4$$

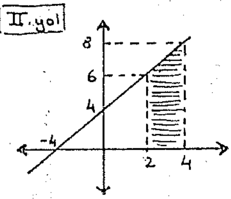
$$= \left(\frac{16}{2}+16\right) - \left(\frac{4}{2}+8\right)$$

$$= (8+16) - (2+8)$$

$$= 24-10$$

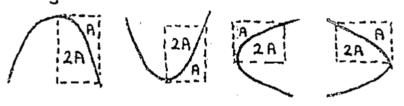
$$= 14\ br^2$$

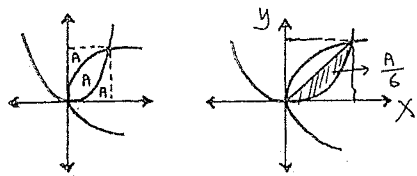
II. yol



$$\text{Yamuğun Alanı} = \frac{2\cdot(8+6)}{2} = 14\ br^2$$

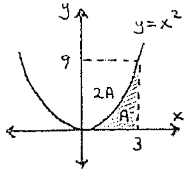
NOT! Parabol grafiklerinde tepe noktasından geçecek şekilde dikdörtgenler oluşturulduğunda alanlar aşağıdaki oranlarda olur.





Not: Dikdörtgenin alanını A kabul ettik.

ÖRNEK 1:



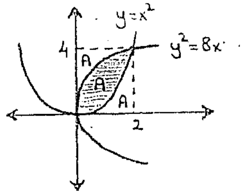
Taralı Alan = ?

$3A = 9\cdot 3$

$3A = 27$

$\boxed{A = 9}$

ÖRNEK 2:



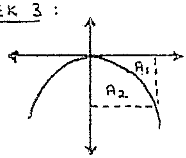
Taralı Alan = ?

$3A = 4\cdot 2$

$3A = 8$

$\boxed{A = \frac{8}{3}}$

ÖRNEK 3:



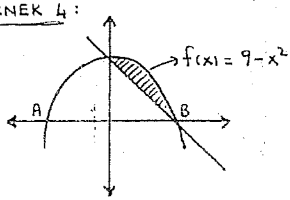
Yandaki şekilde;

$$\frac{A_1 + A_2}{A_2 - A_1} = ?$$

Çözüm:

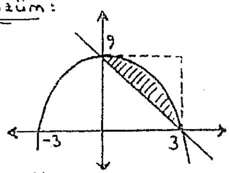
$$A_2 = 2\cdot A_1 \Rightarrow \frac{A_1 + 2A_1}{2A_1 - A_1} = \frac{3A_1}{A_1} = 3$$

ÖRNEK 4:



Yandaki şekle göre taralı alan kaç br^2 dir?

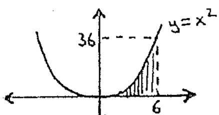
Çözüm:



$$T.A = \frac{A}{6} = \frac{9\cdot 3}{6} = \frac{9}{2}$$

2) $y=x^2$ eğrisi, $x=6$ doğrusu ve x ekseni ile sınırlı bölgenin alanı kaç br^2 dir?

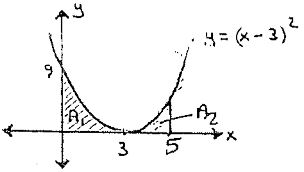
Çözüm:



$$A = \int_0^6 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^6 = \frac{216}{3} = 72\ br^2$$

3) $y=(x-3)^2$, $x=0$ ve $x=5$ doğruları ile x ekseni arasında kalan alan kaç br^2 dir?

Çözüm:



I. yol

$$A_1+A_2=\int_0^3 (x-3)^2dx + \int_3^5 (x-3)^2dx$$

$x-3=u \Rightarrow dx=du$

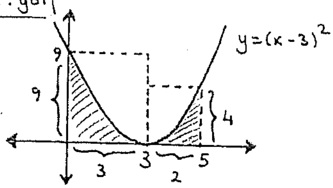
$\int u^2 = \frac{u^3}{3}$

$$=\frac{(x-3)^3}{3}\Big|_0^3 + \frac{(x-3)^3}{3}\Big|_3^5$$

$$=0+\frac{27}{3}+\frac{8}{3}-0$$

$$=9+\frac{8}{3} = \frac{35}{3} \quad br^2$$

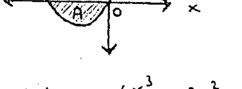
II. yol



$$\frac{3\cdot 9}{3}+\frac{2\cdot 4}{3} = \frac{27+8}{3} = \frac{35}{3} \quad br^2$$

4) Denklemi $y=f(x)=x^2+2x$ olan eğri ile x ekseninin sınırladığı bölgenin alanını hesaplayınız.

Çözüm:

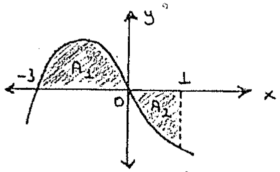


$$-\int_{-2}^{0}(x^2+2x)dx = -\left(\frac{x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}\right)\Big|_{-2}^{0}$$

$$=-\left[0-\frac{-8}{3}-4\right] = -\left(\frac{8}{3}-4\right) = -\frac{-4}{3} = \frac{4}{3}\ br^2$$

5) Denklemi $y=f(x)=-x^2-3x$ olan eğri, x ekseni ve denklemi $x=1$ olan doğru ile sınırlanan bölgenin alanları toplamını bulunuz.

Çözüm: $y=x(-x-3)=0 \Rightarrow x=0$
$x=-3$



$$A=\int_{-3}^{0}(-x^2-3x)dx + \int_0^1 -(-x^2-3x)dx$$

$$=\left(-\frac{1}{3}x^3-\frac{3x^2}{2}\right)\Big|_{-3}^{0} + \left(\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right)\Big|_0^1$$

$$=0-\left(-\frac{1}{3}(-27)-\frac{3}{2}\cdot 9\right)+\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-0$$

$$=-\left(9-\frac{27}{2}\right)+\frac{1}{3}+\frac{3}{2}$$

$$=-9+\frac{27}{2}+\frac{1}{3}+\frac{3}{2}$$

$$=-9+15+\frac{1}{3}$$

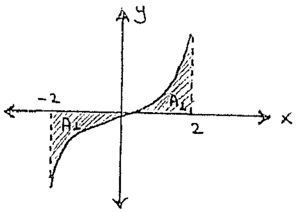
$$=6+\frac{1}{3}$$

$$=\frac{19}{3}\quad br^2 \text{ dir.}$$

6) $y=x^3$ eğrisi $x=-2$, $x=2$ doğruları ve x ekseni arasında kalan alan kaç br^2?

Çözüm: $y=x^3$ tek fonksiyon olduğu için alanlar orijine göre simetrik

$A_1=A_2$

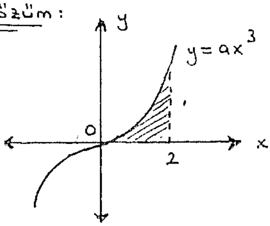


$$A_2=\int_0^2 x^3dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = \frac{16}{4} = 4\quad br^2$$

Taralı Alan $= 2A$
$= 2\cdot 4$
$= 8\ br^2$ dir.

7) $a>0$ olmak koşulu ile $y=ax^3$ eğrisi, x ekseni ve $x=2$ doğrusu ile sınırlı olan alan $12\ br^2$ olduğuna göre a nın değeri nedir?

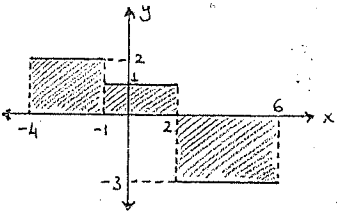
Çözüm:



$$T.A. = \int_0^2 ax^3\,dx = a\,\frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = a\cdot\frac{16}{4} = 12$$

$4a = 12 \Rightarrow \boxed{a=3}$ bulunur.

8)

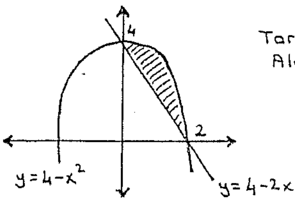


f fonksiyonunun grafiği yukarıda verilmiştir. Buna göre,

$\int_{-4}^{6} f(x)\,dx$ integralinin değeri nedir?

Çözüm: $3.2+3.1-4.3=6+3-12=-3$

9)



Çözüm:

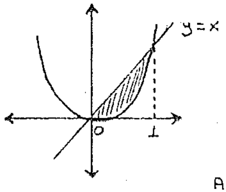
$$\int_0^2 [(4-x^2)-(4-2x)]\,dx = \int_0^2 (\cancel{4}-x^2-\cancel{4}+2x)\,dx$$

$$= \int_0^2 (-x^2+2x)\,dx = \left(-\frac{x^3}{3}+\frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}}\right)\Big|_0^2$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3}+x^2\right)\Big|_0^2 = -\frac{8}{3}+4 = \frac{4}{3}$$ bulunur.

10) Denklemi $y=x^2$ olan eğri (parabol) ve denklemi $y=x$ olan doğru ile sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:



$y_{parabol} = y_{doğru}$

$x^2 = x$

$x^2 - x = 0$

$x(x-1) = 0$

$x=0 \quad x=1$

Taralı bölgenin alanı;

$$A = \int_0^1 (y_{doğru} - y_{parabol})\,dx$$

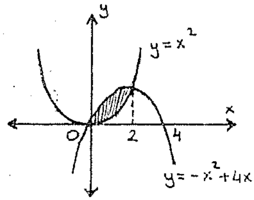
$$A = \int_0^1 (x-x^2)\,dx = \left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1$$

$A = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\ br^2$ dir.

11) $y=x^2$ ve $y=-x^2+4x$ eğrileri arasında kalan alan kaç br^2 dir?

Çözüm:

Eğriler ortak çözülerek kesim noktaları bulunur.



$x^2 = -x^2+4x$

$2x^2-4x=0$

$x(2x-4)=0$

$x=0 \quad x=2$

$$A = \int_0^2 (-x^2+4x-x^2)\,dx = \int_0^2 (-2x^2+4x)\,dx$$

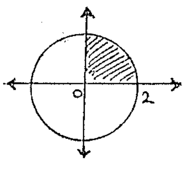
$$= \left(-\frac{2x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}\right)\Big|_0^2 = -\frac{2}{3}.8+2.4$$

$= -\frac{16}{3}+8 = \frac{8}{3}\ br^2$ dir.

12) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$ integrali neye eşittir?

Çözüm:

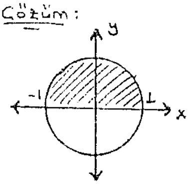
Bu integral denklemi $x^2+y^2=4$ olan dairenin dörtte birinin alanına eşittir.



$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = \frac{\pi r^2}{4} = \frac{\pi\cdot 2^2}{4} = \pi\ br^2$$

13) $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$ integralinin eşitini bulunuz.

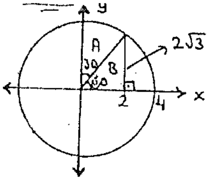
Çözüm:



$$T.A. = \frac{\pi \cdot 1^2}{2} = \frac{\pi}{2} \text{ br}^2 \text{ dir.}$$

14) $\int_{0}^{2} \sqrt{16-x^2}\,dx$ integralinin sonucu kaçtır?

Çözüm:

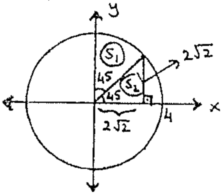


$$\text{Alan} = A + B = \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 30}{360} + \frac{2 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}$$

15) ★ $\int_{0}^{2\sqrt{2}} \sqrt{16-x^2}\,dx$ integralinin değeri kaçtır?

A) $2\pi+4$ B) $2\pi+2$ C) 2π D) $2\pi-2$ E) $2\pi-4$

Çözüm:



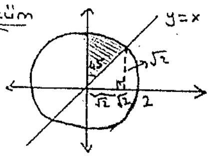
$$\text{Alan} = S_1 + S_2 = \frac{\pi \cdot 4^2}{8} + \frac{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}}{2} = 2\pi + 4$$

bulunur.

16) $\int_{0}^{\sqrt{2}} (\sqrt{4-x^2} - x)\,dx$ integralinin değeri kaçtır?

A) $\frac{\pi}{8}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) π E) 2π

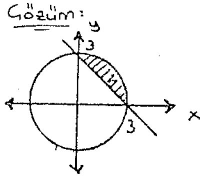
Çözüm



$$y = \sqrt{4-x^2}$$
$$y^2 = 4 - x^2$$
$$x^2 + y^2 = 4$$
$$\frac{\pi \cdot r^2}{8} = \frac{\pi \cdot 4}{8} = \frac{\pi}{2}$$

17) $\int_{0}^{3} [\sqrt{9-x^2} - (3-x)]\,dx$ integralinin sonucu kaçtır?

Çözüm:

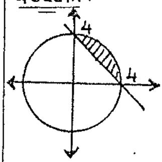


İntegralin değeri şekildeki taralı alandır. Bu alan dörtte bir daire dilimi ile dik üçgenin alanları farkına eşittir.

$$\int_{0}^{3} [\sqrt{9-x^2} - (3-x)]\,dx = \frac{\pi \cdot 3^2}{4} - \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9\pi}{4} - \frac{9}{2} = \frac{1}{4}(9\pi - 18) \text{ br}^2 \text{ dir.}$$

18) $\int_{0}^{4} (\sqrt{16-x^2} + x - 4)\,dx$ değeri kaçtır?

Çözüm:

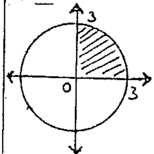


A = Taralı Alan = İstenen

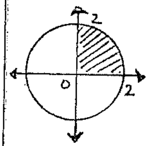
$$A = \frac{\pi \cdot 4^2}{4} - \frac{4 \cdot 4}{2} = 4\pi - 8 \text{ br}^2 \text{ dir.}$$

19) $\int_{0}^{3} \sqrt{9-x^2}\,dx - \int_{0}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx$ ifadesinin değeri kaçtır?

Çözüm:



$$\text{Alan} = \int_{0}^{3} \sqrt{9-x^2}\,dx = \frac{\pi \cdot 9}{4} = \frac{9\pi}{4} //$$

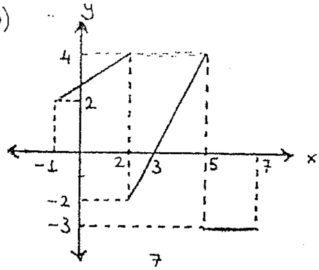


$$\text{Alan} = \int_{0}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx = \frac{\pi \cdot 4}{4} = \pi //$$

$$\int_{0}^{3} \sqrt{9-x^2}\,dx - \int_{0}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx = \frac{9\pi}{4} - \pi = \frac{5\pi}{4}$$

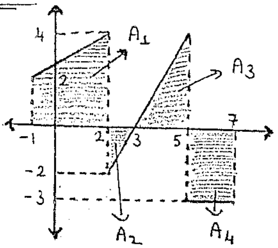
bulunur.

20)



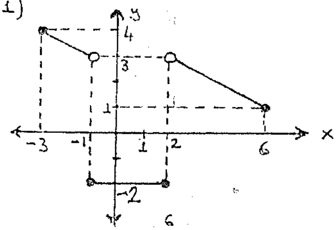
Buna göre $\int_{-1}^{7} f(x)\,dx = ?$

<u>Çözüm:</u>



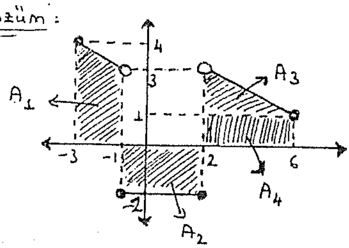
$$\int_{-1}^{7} f(x)\,dx = A_1 - A_2 + A_3 - A_4$$
$$= 9 - 1 + 4 - 6$$
$$= 6$$

21)



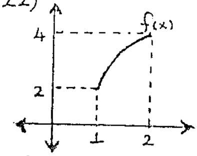
Buna göre $\int_{-3}^{6} f(x)\,dx = ?$

<u>Çözüm:</u>



$$\int_{-3}^{6} f(x)\,dx = A_1 - A_2 + A_3 + A_4$$
$$= 7 - 6 + 4 + 4$$
$$= 9$$

22) (2006 ÖSS)

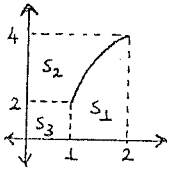


Şekilde grafiği verilen birebir örten $f : [1,2] \to [2,4]$ fonksiyonunun tersi f^{-1}dir. Buna göre,

$\int_{1}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{4} f^{-1}(x)\,dx$ toplamı kaçtır?

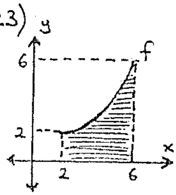
A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

<u>Çözüm:</u>



$$S_1 = \int_{1}^{2} f(x)\,dx$$
$$S_2 = \int_{2}^{4} f^{-1}(x)\,dx$$
$$S_1 + S_2 + S_3 = 2 \cdot 4 = 8$$
$$S_1 + S_2 + 2 \cdot 1 = 8$$
$$S_1 + S_2 = 8 - 2$$
$$S_1 + S_2 = 6$$

23)

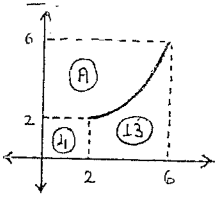


[2,6] aralığı üzerinde tanımlı olan birebir ve örten f fonksiyonunun grafiği şekilde veriliyor.

Boyalı bölgenin alanı $13\,br^2$ olduğuna göre,

$\int_{2}^{6} f^{-1}(x)\,dx$ integralinin değeri kaçtır?

<u>Çözüm:</u>

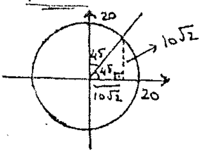


A : istenen

$$A + 4 + 13 = 6 \cdot 6$$
$$\Rightarrow A + 17 = 36$$
$$\Rightarrow A = 19\ br^2 \text{ olur.}$$

24) $\int_0^{10\sqrt{2}} \left(\sqrt{400-x^2} - x\right) dx$ ifadesinin değeri kaçtır?

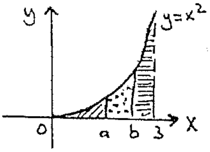
Çözüm:



$\dfrac{45 \cdot \pi \cdot 20^2}{360} = \dfrac{\pi \cdot 400}{8}$

$= 50\pi$

25) Dik koordinat düzleminde $y=x^2$ eğrisi, x ekseni ve $x=3$ doğrusu arasında kalan boyalı bölge aşağıda gösterilmiştir.



Bu boyalı bölge $x=a$ ve $x=b$ doğruları ile eşit alanlı üç alt bölgeye ayrılıyor. Buna göre $a \cdot b$ çarpımı kaçtır?

A) $5\sqrt{2}$ B) $4\sqrt{3}$ C) $6\sqrt{3}$ D) $3\sqrt[3]{6}$ E) $2\sqrt[3]{9}$

Çözüm: Alanlar eşit olduğuna göre,

$S = \int_0^a x^2 dx = \int_a^b x^2 dx = \int_b^3 x^2 dx$

$\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^a = \left.\frac{x^3}{3}\right|_a^b = \left.\frac{x^3}{3}\right|_b^3 \Rightarrow \frac{a^3}{3} = \frac{b^3-a^3}{3} = \frac{27-b^3}{3}$

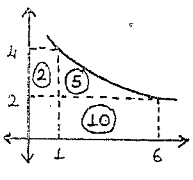
$a^3 = b^3 - a^3 = 27 - b^3 \Rightarrow \boxed{2a^3 = b^3} \Rightarrow a^3 = 27 - b^3$

$a^3 = 27 - 2a^3 \Rightarrow 3a^3 = 27 \Rightarrow \boxed{a^3 = 9}$ $b^3 = 2 \cdot 9 \Rightarrow \boxed{b^3 = 18}$

$a^3 \cdot b^3 = 9 \cdot 18 \Rightarrow a \cdot b = \sqrt[3]{9 \cdot 3 \cdot 6} \Rightarrow a \cdot b = 3 \cdot \sqrt[3]{6}$ olur

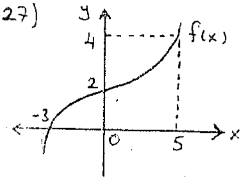
26) $f(1) = 4$, $f(6) = 2$, $\int_1^6 f(x)dx = 15$ ise $\int_2^4 f^{-1}(x)dx = ?$

Çözüm:



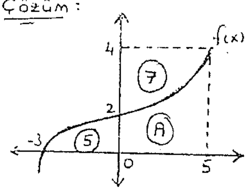
$\int_2^4 f^{-1}(x)dx = 7$

27)



$\int_2^4 f^{-1}(x)dx = 7$ ve $\int_{-3}^0 f(x)dx = 5$ ise $\int_{-3}^5 f(x)dx = ?$

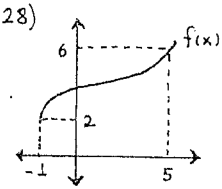
Çözüm:



$A = 13$

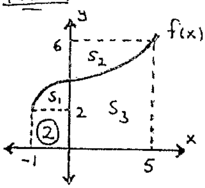
$\int_{-3}^5 f(x)dx = 5 + 13$
$= 18$

28)



Yandaki şekilde $\int_{-1}^5 f(x)dx + \int_2^6 f^{-1}(x)dx = ?$

Çözüm:



$2 + S_1 + S_3 + (-S_1 + S_2)$

$2 + \underbrace{S_2 + S_3}_{30} = 32$

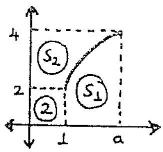
29) Birebir örten $f(x)$ fonksiyonunun tersi $f^{-1}(x)$ dir. $a > 1$ $f(1) = 2$, $f(a) = 4$ olmak üzere,

$\int_1^a f(x)dx + \int_2^4 f^{-1}(x)dx = 6$ ise

a kaçtır?

A) $\frac{3}{2}$ B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm:



$S_1 + S_2 + 2 = 4 \cdot a$

$6 + 2 = 4a$

$8 = 4a$

$a = 2$

30) $a < b < c$ olmak üzere,

$\int_a^b 2f(x)dx = 16$, $\int_c^b 3f(x)dx = 18$

olduğuna göre,

$\int_a^c 5f(x)dx$

integralinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$$\int_a^c 5f(x)\,dx = 5\int_a^b f(x)\,dx + 5\int_b^c f(x)\,dx$$

$$= 5\cdot 8 - 5\cdot 6$$

$$= 40 - 30$$

$$= 10$$

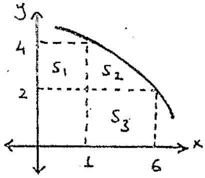
NOT ! $\int_b^c f(x)\,dx = -\int_c^b f(x)\,dx$ aldık.

31) $f(x)$ fonksiyonu birebir örten ve sürekli bir fonksiyondur.

$f(1)=4$, $f(6)=2$, $\int_1^6 f(x)\,dx = 15$

olduğuna göre $\int_2^4 f^{-1}(x)\,dx$ kaçtır?

Çözüm:



$S_3 = 5\cdot 2 = 10$

$\int_1^6 f(x)\,dx = S_3 + S_2$

$= 15$

$10 + S_2 = 15$

$S_2 = 5$

$S_1 = 1\cdot 2 = 2$

$\int_2^4 f^{-1}(x)\,dx = S_1 + S_2$

$= 2 + 5 = 7$

32) Denklemleri $y=x^2$ ve $y^2=8x$ olan eğrilerin sınırladığı bölgenin alanı kaç birim karedir?

Çözüm

NOT ! $\left.\begin{matrix} y=ax^2 \\ y^2=bx \end{matrix}\right\}$ eğrilerinin sınırladığı bölgenin alanı,

$A = \dfrac{b}{3a}$ ile bulunur.

Buradan;

$y=x^2 \Rightarrow a=1$

$y^2=8x \Rightarrow b=8$

$A = \dfrac{b}{3a} = \dfrac{8}{3\cdot 1} = \dfrac{8}{3}\ br^2$ //

33) Analitik düzlemde $3y=x^2$ eğrisi ile $y^2=3x$ eğrisinin sınırladığı kapalı bölgenin alanı kaç br^2 dir?

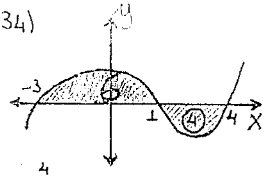
Çözüm:

$y = \frac{1}{3}x^2 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$

$y^2 = 3x \Rightarrow b = 3$

$A = \dfrac{b}{3a} = \dfrac{3}{\cancel{3}\cdot\frac{1}{\cancel{3}}} = 3\ br^2$ //

34)



Şekilde $y=f(x)$ fonksiyonunun x ekseni ile sınırladığı alanlar 6 ve 4 br^2 ise,

$\int_{-3}^4 f(x)\,dx$ integralini bulunuz.

Çözüm:

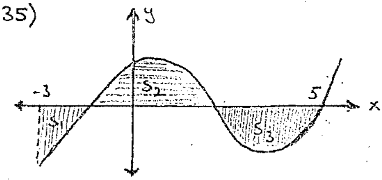
$$\int_{-3}^4 f(x)\,dx = \int_{-3}^1 f(x)\,dx + \int_1^4 f(x)\,dx$$

$= 6 + (-4)$

$= 6 - 4$

$= 2$ bulunur.

35)



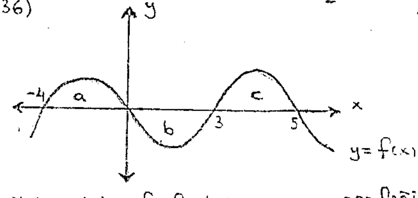
Şekilde $S_1 = 2\ br^2$, $S_3 = 4\ br^2$ ve $\int_{-3}^5 f(x)\,dx = 2$ ise S_2 alanı kaç br^2 dir?

A) 10 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

Çözüm: $-S_1 + S_2 - S_3 = 2 \Rightarrow -2 + S_2 - 4 = 2$

$\Rightarrow S_2 = 8\ br^2$ //

36)



Yukarıdaki f fonksiyonunun grafiği ile x ekseninin sınırladığı bölgelerin alanları sırasıyla a, b ve c birimkaredir. Buna göre,

$$\int_{-4}^5 |f(x)|\,dx - \int_{-4}^3 f(x)\,dx$$

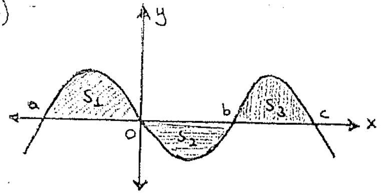
değerinin a, b ve c cinsinden ifadesi nedir?

Çözüm:

$\left.\begin{matrix} \int_{-4}^5 |f(x)|\,dx = a+b+c \\ \int_{-4}^3 f(x)\,dx = a-b \end{matrix}\right\}$ $(a+b+c) - (a-b)$

$= 2b + c$ //

37)



Şekilde f(x) fonksiyonunun grafiği ile x ekseni arasındaki alanlar S_1, S_2, S_3 br² dir.

$\int_a^b f(x)\,dx = -2$, $\int_0^c f(x)dx = 4$ ve

$\int_a^c f(x)dx = 7$ ise $S_1+S_2+S_3$ kaç br²dir?

A) 14 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18

Çözüm:

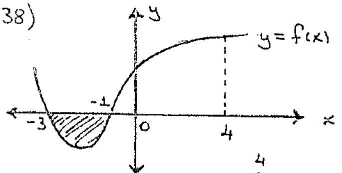
$$\left.\begin{aligned} S_1 - S_2 &= -2 \\ \pm \cancel{S_2} \mp \cancel{S_3} &= \mp 4 \\ S_1 - \cancel{S_2} + \cancel{S_3} &= 7 \end{aligned}\right\}$$

$$\boxed{S_1 = 3}$$

$3 - S_2 = -2$ $\boxed{S_2 = 5}$ $\qquad -5 + S_3 = 4$ $\boxed{S_3 = 9}$

$$S_1 + S_2 + S_3 = 3+5+9 = 17 \text{ br}^2$$

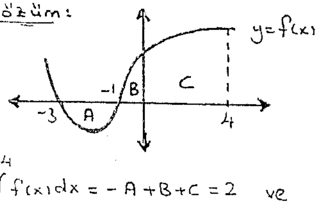
38)



Yukarıdaki şekilde $\int_{-3}^{4} f(x)\,dx = 2$

ve $\int_{-1}^{4} f(x)dx = 8$ ise taralı alan=?

Çözüm:



$\int_{-3}^{4} f(x)dx = -A+B+C = 2$ ve

$\int_{-1}^{4} f(x)\,dx = B+C = 8$ ise $A = 6$ br²

39) Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı artan ve sürekli bir f fonksiyonu için,

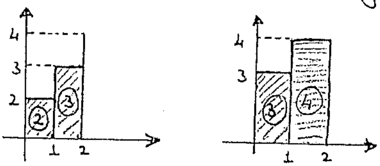
$f(0)=2$, $f(1)=3$, $f(2)=4$

eşitlikleri verilmiştir. Buna göre,

$\int_0^2 f(x)dx$ integralinin değeri hangisi olabilir?

A) 4 B) 4,5 C) 6 D) 7,5 E) 8

Çözüm 1: Riemann toplamından yapalım.



Alt toplam
$2+3=5$

Üst toplam
$3+4=7$

İstenen alan $= \int_0^2 f(x)\,dx = A$

$5 < A < 7$ ⇒ Bu aralığa sadece 6 girer. Cevap C

Çözüm 2: $\left.\begin{aligned} f(0)&=2 \\ f(1)&=3 \\ f(2)&=4 \end{aligned}\right\}$ fonksiyon doğrusal fonksiyondur.

$f(x) = x+2$

$\int_0^2 (x+2)\,dx = \left.\frac{x^2}{2} + 2x\right|_0^2 = \frac{4}{2} + 4 = 2+4 = 6$ olur.

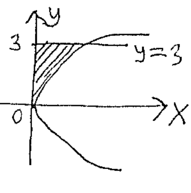
(2018 AYT)

40) $y^2 = x$ eğrisi, $y=3$ doğrusu ve y ekseni arasında kalan bölgenin alanı kaç birimkaredir?

A) 4 B) 6 C) 9 D) 12 E) 15

Çözüm:

$\int_0^3 y^2\,dy = \left.\frac{y^3}{3}\right|_0^3$



$= \frac{27}{3}$

$= 9$ br² Cevap C